

Zweidimensionale Splineinterpolation über einem Polargitter

J. GRZANNA

*Zentralinstitut für Optik und Spektroskopie der AdW der DDR,
DDR 1199 Berlin-Adlershof, Rudower Chaussee 6, East Germany*

Communicated by Garrett Birkhoff

Received January 16, 1976

1. EINFÜHRUNG

Erstmals beschäftigten sich Birkhoff und Garabedian [1] mit der Konstruktion von glatten Interpolationsfunktionen über einem nichtrechteckigem Gitter. Das Problem der Berechnung von Splinefunktionen über einem Polargitter behandelte Chi [2]. Er versuchte über dem Polargitter.

$$0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n = 2\pi, \quad 0 = r_1 < r_2 < \dots < r_m$$

mit dem Ansatz

$$v(\varphi, r) = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ijkil}(\varphi r - \varphi_i r_j)^k (r - r_j)^l$$

für $\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}, \quad r_j \leq r \leq r_{j+1}$ (1)

eine glatte Funktion zu konstruieren. Im 2. Abschnitt wird gezeigt, daß dieser Versuch nicht zum Ziel führt, da aus dem Ansatz (1) die Unstetigkeit von v für $\varphi = \varphi_i$ und $r_j < r < r_{j+1}$ folgt. Im 3. Abschnitt wird bewiesen, daß man mit dem Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ijkl}(f(x) - f(x_i))^k (g(y) - g(y_j))^l$$

für $x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}, f \in C^2([x_1, x_n])$
und $g \in C^2([y_1, y_m])$ (2)

eine interpolierende Fläche mit $u \in C^2([x_1, x_n] \times [y_1, y_m])$ über einem Rechteckgitter $x_1 < x_2 < \dots < x_n, y_1 < y_2 < \dots < y_m$ konstruieren kann, in dem alle Nullstellen von $(df/dx)(x)$ in $[x_1, x_n]$ bzw. alle Nullstellen von

$(dg/dy)(y)$ in $[y_1, y_m]$ vorkommen müssen. Im 4. Abschnitt wird eine Verbesserung des Ansatzes (1) über einem Polargitter untersucht. Es ist der Ansatz (2) mit $x = \varphi$, $y = r$, $f(\varphi) = \cos \varphi$, $g(r) = r$, d.h.

$$u(\varphi, r) = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ijkl} (\cos \varphi - \cos \varphi_i)^k (r - r_j)^l$$

wobei $\bar{u}(x, y) = u(\varphi(x, y), r(x, y))$ über dem gesamten Kreisgebiet zweimal und nur im Nullpunkt einmal stetig differenzierbar ist. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist, bei dem durch die Einführung des \cos eine einmal stetige Differenzierbarkeit im Nullpunkt erreicht wird, daß für diese interpolierende Fläche immer $(\partial \bar{u} / \partial y)(x, 0) = 0$ ist.

Als Ergebnis der Suche nach einer glatten, allgemein konstruierbaren Interpolationsfunktion über einem Polargitter wird im 5. Abschnitt der folgende modifizierte Splinefunktionenansatz dargelegt.

$$w(\varphi, r) = (1 - h(r))(w_{11} + rU(\varphi)) + h(r) \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ijkl} (\varphi - \varphi_i)^k (r - r_j)^l, \quad (3)$$

wobei $h \in C^2([r_1, r_m])$ mit

$$(a) \quad h(r) = \begin{cases} 0, & r = r_1, \\ 1, & r \geq r_2, \end{cases}$$

$$(b) \quad \frac{dh}{dr}(r_1) = \frac{dh}{dr}(r_2) = \frac{d^2h}{dr^2}(r_1) = \frac{d^2h}{dr^2}(r_2) = 0$$

und $U(\varphi) = c \cos \varphi + d \sin \varphi$.

2. SPLINES VON C. CHI ÜBER EINEM POLARGITTER

Sei G_{nm} das folgende Polargitter

$$G_{nm} = \{(\varphi_i, r_j) \mid 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq m \wedge 0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n \\ = 2\pi \wedge 0 = r_1 < r_2 < \dots < r_m\}.$$

Ferner sei

$$F_{ij}^{\varphi r} = \{(\varphi, r) \mid \varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1} \wedge r_j \leq r \leq r_{j+1}\}.$$

Chi [2] führte über G_{nm} die Funktion (1) für $(\varphi, r) \in F_{ij}^{\varphi r}$ ein und behauptete,

daß sie glatt sei. Aus diesem Ansatz folgt aber, daß entlang der Grenzlinie, zwischen $F_{i-1j}^{\varphi r}$ und $F_{ij}^{\varphi r}$, d.h. für $\varphi = \varphi_i, r_j < r < r_{j+1}$, immer

$$\sum_{l=0}^3 \left(\sum_{k=0}^3 a_{i-1jkl} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^k r^k \right) (r - r_j)^l = \sum_{l=0}^3 a_{ij0l} (r - r_j)^l \quad (4)$$

gelten muß, da das Koordinatensystem so gedreht werden sollte, daß in $F_{ij}^{\varphi r} \varphi_i = 0$ ist. Die Gleichung (4) führt bei Erfüllung zur Forderung

$$\sum_{k=0}^3 a_{i-1jkl} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^k r^k = a_{ij0l}, \quad l = 0(1) 3, \quad r_j < r < r_{j+1}$$

und hieraus würde eine Überbestimmung der Splinekoeffizienten a_{ijkl} folgen. Bei Nichterfüllung von (4) führt dieses zu einer Unstetigkeit von v entlang $\varphi = \varphi_i, r_j < r < r_{j+1}$. Diese Unstetigkeit resultiert aus der Verknüpfung der Argumente φr im Ansatz (1).

3. VERALLGEMEINERTE SPLINES ÜBER EINEM RECHTECKGITTER

Für $f \in C^2([x_1, x_n])$ sei N_f^x die Menge aller Nullstellen von $(df/dx)(x)$ in $[x_1, x_n]$:

$$N_f^x = \left\{ x \mid x_1 \leq x \leq x_n \wedge \frac{df}{dx}(x) = 0 \right\} \quad \text{mit } c(f) = \text{card}(N_f^x).$$

Die Elemente von N_f^x seien streng monoton steigend angeordnet:

$$N_f^x = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{c(f)}}\} \quad \text{mit } x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{c(f)}}$$

und $i_1 < i_2 < \dots < i_{c(f)}$.

Sei $G_n^{fx} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eine Unterteilung von $[x_1, x_2]$ in $n - 1$ Teilintervalle mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ derart, daß mindestens die Nullstellen von $(df/dx)(x)$ ($x \in [x_1, x_n]$) in G_n^{fx} vorkommen:

$$N_f^x \subseteq G_n^{fx}.$$

Durch G_{nm}^{fg} wird das folgende Rechteckgitter definiert:

$$G_{nm}^{fg} = G_n^{fx} \times G_m^{gy}.$$

Ferner gelte für $k = 0(1) c(f), l = 0(1) c(g)$:

$$R_{kl}^{xy} = \{(x, y) \mid x_{i_k} \leq x \leq x_{i_{k+1}} \wedge y_{j_l} \leq y \leq y_{j_{l+1}}\}$$

mit $i_0 = 1, i_{c(f)+1} = n, j_0 = 1, j_{c(g)+1} = m$.

THEOREM 1. Gegeben sei ein Rechteckgitter G_{nm}^{fg} mit $f \in C^2([x_1, x_n])$,
 $c(f) < \infty$,

$$g \in C^2([y, y_m]) \quad \text{und} \quad c(g) < \infty,$$

$u(x, y)$ durch (2) in F_{ij}^{xy} für $i = 1(1)n - 1, j = 1(1)m - 1$,

nm Werte u_{ij} in den Gitterpunkten von G_{nm}^{fg} ,

$2m$ Werte $p_{ij} = (\partial u / \partial x)(x_i, y_j)$ für $i = 1, n, j = 1(1)m$

mit $p_{ij} = 0$, falls $i = i_1 = 1$ oder $i = i_{c(f)} = n$,

$2n$ Werte $q_{ij} = (\partial u / \partial y)(x_i, y_j)$ für $i = 1(1)n, j = 1, m$

mit $q_{ij} = 0$, falls $j = j_1 = 1$ oder $j = j_{c(g)} = m$,

4 Werte $r_{ij} = (\partial^2 u / \partial x \partial y)(x_i, y_j)$ für $i = 1, n, j = 1, m$

mit $r_{ij} = 0$, falls $i = i_1 = 1, i = i_{c(f)} = n, j = j_1 = 1, j = j_{c(g)} = m$.

Dann existiert ein $u(x, y)$ mit

- (a) $u \in C^2([x_1, x_n] \times [y_1, y_m])$,
- (b) $u(x_i, y_j) = u_{ij}$ für $i = 1(1)n, j = 1(1)m$,
- (c) $(\partial u / \partial x)(x_i, y_j) = p_{ij}$ für $i = 1, n, j = 1(1)m$,
- (d) $(\partial u / \partial y)(x_i, y_j) = q_{ij}$ für $i = 1(1)n, j = 1, m$,
- (e) $(\partial^2 u / \partial x \partial y)(x_i, y_j) = r_{ij}$ für $i = 1, n, j = 1, m$.

Beweis. In R_{kl}^{xy} mit $0 \leq k \leq c(f)$ und $0 \leq l \leq c(g)$ werden folgende Substitutionen eingeführt:

$$\bar{x}(x) = s_f f(x) = |f(x)|, \quad \bar{y}(y) = s_g g(y) = |g(y)|$$

$$\text{mit } s_f = \text{sign}(f(x_{i_{k+1}}) - f(x_{i_k})) \quad \text{und} \quad s_g = \text{sign}(g(y_{j_{l+1}}) - g(y_{j_l})).$$

Da $f(x)$ in $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ und $g(y)$ in $[y_{j_l}, y_{j_{l+1}}]$ streng monoton wachsen oder fallen, sind sie dort auch umkehrbar.

$$x = f^{-1}(s_f \bar{x}), \quad y = g^{-1}(s_g \bar{y})$$

Für $u(x, y)$ folgt

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(f^{-1}(s_f \bar{x}), g^{-1}(s_g \bar{y})) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ijkl} (s_f (\bar{x} - \bar{x}_i))^k (s_g (\bar{y} - \bar{y}_j))^l \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 b_{ijkl} (\bar{x} - \bar{x}_i)^k (\bar{y} - \bar{y}_j)^l = z(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

mit $\bar{x}_i = \bar{x}(x_i)$, $\bar{y}_j = \bar{y}(y_j)$, $b_{ijkl} = a_{ijkl} s_f^k s_g^l$, $\bar{x}_{i_k} < \bar{x}_{i_{k+1}} < \dots < \bar{x}_{i_{k+1}}$

und $\bar{y}_{j_l} < \bar{y}_{j_{l+1}} < \dots < \bar{y}_{j_{l+1}}$.

In R_{kl}^{xy} konnte $u(x, y)$ also auf eine bikubische Splinefunktion $z(\bar{x}, \bar{y})$ zurückgeführt werden. In [3] wurde gezeigt, daß $z \in C^2([\bar{x}_i, \bar{x}_{i_{k+1}}] \times [\bar{y}_j, \bar{y}_{j_{l+1}}])$ mit

$$z(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = u_{ij} \quad \text{für } i = i_k(1) i_{k+1}, j = j_l(1) j_{l+1} \text{ gilt.}$$

Die vorzugebenden partiellen Ableitungen am Rand von R_{kl}^{xy} zur Konstruktion von z werden wie folgt gewählt:

$$i = i_k, i_{k+1}, j = j_l(1) j_{l+1} : \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0, \quad \text{falls } x_i \in N_f^x \tag{5a}$$

$$= \frac{p_{ij}}{(d\bar{x}/dx)(x_i)}, \quad \text{sonst;}$$

$$i = i_k(1) i_{k+1}, j = j_l, j_{l+1} : \frac{\partial z}{\partial \bar{y}}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0, \quad \text{falls } y_j \in N_g^y \tag{5b}$$

$$= \frac{q_{ij}}{(d\bar{y}/dy)(y_j)}, \quad \text{sonst;}$$

$$i = i_k, i_{k+1}, j = j_l, j_{l+1} : \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0, \quad \text{falls } x_i \in N_f^x \text{ oder } y_j \in N_g^y \tag{5c}$$

$$= \frac{r_{ij}}{(d\bar{x}/dx)(x_i)(d\bar{y}/dy)(y_j)}, \quad \text{sonst.}$$

Da $\bar{x} \in C^2([x_{i_k}, x_{i_{k+1}}])$ und $\bar{y} \in C^2([y_{j_l}, y_{j_{l+1}}])$ gilt, ist $u(x, y) = z(\bar{x}, \bar{y})$ ebenfalls ein Element aus $C^2(R_{kl}^{xy})$ mit den Eigenschaften (b), (c), (d) und (e). Um (a) über dem gesamten Definitionsbereich zu beweisen, muß u entlang der Grenzlinie zwischen den einzelnen R_{kl}^{xy} betrachtet werden.

Aus Symmetriegründen wird u nur zwischen R_{k-1l}^{xy} und R_{kl}^{xy} untersucht. Sei $i = i_k$ und $j_l \leq j \leq j_{l+1}$. Dann gilt

$$u_{i-1j}(x_i, y) = z_{i-1j}(\bar{x}_i, \bar{y}) = z_{ij}(\bar{x}_i, \bar{y}) = u_{ij}(x_i, y),$$

(wobei $u_{ij}(x, y)$ die Einschränkung von $u(x, y)$ in F_{ij}^{xy} ist) denn die vorzugebenden Werte u_{ij} ($j = j_l(1) j_{l+1}$) mit den Ableitungen $(\partial z / \partial y)(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ ($j = j_l, j_{l+1}$) für die eindimensionalen Splinefunktionen $z_{i-1j}(\bar{x}_i, \bar{y})$ und $z_{ij}(\bar{x}_i, \bar{y})$ sind identisch.

Ferner gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{d\bar{x}}{dx} \frac{d\bar{y}}{dy},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{d\bar{x}}{dx}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \frac{d^2 \bar{x}}{dx^2}$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial u_{i-1j}}{\partial x}(x_i, y) = 0 = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x}(x_i, y),$$

$$\frac{\partial^2 u_{i-1j}}{\partial x \partial y}(x_i, y) = 0 = \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial y}(x_i, y),$$

$$\frac{\partial^2 u_{i-1j}}{\partial x^2}(x_i, y) = 0 = \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2}(x_i, y), \quad \text{wegen } \frac{d\bar{x}}{dx}(x_i) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial z_{i-1j}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_i, \bar{y}) = 0 = \frac{\partial z_{ij}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_i, \bar{y}),$$

wobei die letzte Gleichung eine Folgerung aus (5a) und (5c) ist. Damit ist (a) und das Theorem 1 bewiesen.

4. COSINUSSPLINES ÜBER EINEM POLARGITTER

Es sei $K_c(a) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ein Kreisgebiet mit dem Radius a und $\bar{K}_c(a) = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ein Kreisgebiet ohne Nullpunkt.

THEOREM 2. Gegeben sei ein Polargitter G_{nm}^{fg} mit $f(\varphi) = \cos \varphi$, $g(r) = r$,

$$\varphi_1 = r_1 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_n = 2\pi$$

$u(\varphi, r)$ durch (2) in $F_{ij}^{\varphi r}$ für $i = 1(1)n - 1$, $j = 1(1)m - 1$, nm Werte u_{ij} in den Gitterpunkten von G_{nm}^{fg} mit

$$u_{i1} = u_{11} \quad \text{für } i = 2(1)n \quad \text{und} \quad u_{1j} = u_{nj} \quad \text{für } j = 2(1)m,$$

$$2m \text{ Werte } p_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\varphi_i, r_j) = 0 \quad \text{für } i = 1, n, j = 1(1)m,$$

$$n \text{ Werte } q_{im} = \frac{\partial u}{\partial r}(\varphi_i, r_m) \quad \text{für } i = 1(1)n \text{ mit } q_{1m} = q_{nm},$$

$$n \text{ Werte } q_{i1} = \frac{\partial u}{\partial r}(\varphi_i, 0) = c \cos \varphi_i \quad \text{für } i = 1(1)n,$$

wobei c eine beliebige reelle Zahl ist,

$$4 \text{ Werte } r_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r}(\varphi_i, r_j) = 0 \quad \text{für } i = 1, n, j = 1, m.$$

Dann existiert ein $u(\varphi, r)$ mit

- (a) $\bar{u}(x, y) = u(\varphi(x, y), r(x, y)) \in C^1(K_c(r_m)) \cap C^2(\bar{K}_c(r_m))$,
- (b) $(\partial\bar{u}/\partial x)(0, 0) = c, (\partial\bar{u}/\partial y)(0, 0) = 0$,
- (c) $u(\varphi_i, r_j) = u_{ij}$ für $i = 1(1)n, j = 1(1)m$,
- (d) $(\partial u/\partial r)(\varphi_i, r_m) = q_{im}$ für $i = 1(1)n$,
- (e) $(\partial u/\partial r)(\varphi, 0) = c \cos \varphi$.

Beweis. Da alle Bedingungen des Theorem 1 erfüllt sind, folgt sofort (c) und (d) mit $u \in C^2([0, 2\pi] \times [0, r_m])$. Weil auch $\varphi \in C^2(\bar{K}_c(r_m))$ und $r \in C^2(\bar{K}_c(r_m))$ ist, gilt $\bar{u} \in C^2(\bar{K}_c(r_m))$, denn für die Grenzlinie $\{(x, 0) \mid 0 < x \leq r_m\}$ kann Folgendes gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1j}(x, 0) &= u_{1j}(0, x) = u_{n-1j}(2\pi, x) = \bar{u}_{n-1j}(x, 0), \text{ wegen} \\ u_{1j} &= u_{nj} \text{ für } j = 1(1)m \text{ mit } q_{11} = q_{n1} \text{ und } q_{1m} = q_{nm}, \\ \frac{\partial \bar{u}_{1j}}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\partial u_{1j}}{\partial \varphi}(0, x) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial u_{1j}}{\partial r}(0, x) \frac{\partial r}{\partial y}(x, 0) = 0, \\ \text{wegen } \frac{\partial r}{\partial y}(x, 0) &= 0 \text{ und } \frac{\partial u_{1j}}{\partial \varphi}(0, x) = 0, \text{ wobei die letzte} \\ \text{Gleichung eine Folgerung aus } p_{1j} &= 0 \text{ für } j = 1(1)m \text{ mit} \\ r_{11} = r_{1m} &= 0 \text{ ist,} \end{aligned}$$

analog beweist man $(\partial \bar{u}_{n-1j}/\partial y)(x, 0) = 0$,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_{1j}}{\partial x \partial y}(x, 0) = \frac{\partial^2 \bar{u}_{n-1j}}{\partial x \partial y}(x, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_{1j}}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 \bar{u}_{n-1j}}{\partial y^2}(x, 0).$$

Bleibt noch, um (a) zu beweisen, \bar{u} im Nullpunkt zu betrachten. Aus den gegebenen Werten $u_{i1} = u_{11}$ für $i = 2(1)n$ mit $p_{11} = p_{n1} = 0$ zur Berechnung von $u(\varphi, 0) = \sum_{k=0}^3 a_{i1k0}(\cos \varphi - \cos \varphi_i)^k$ folgt, daß $u(\varphi, 0) = u_{11}$ gilt mit

$$a_{i100} = u_{11}, \quad a_{i110} = a_{i120} = a_{i130} = 0.$$

Ebenfalls folgt aus den Werten $q_{i1} = c \cos \varphi_i$ für $i = 1(1)n$ mit $r_{11} = r_{n1} = 0$ für $(\partial u/\partial r)(\varphi, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r}(\varphi, 0) &= \sum_{k=0}^3 a_{i1k1}(\cos \varphi - \cos \varphi_i)^k = c \cos \varphi \\ \text{mit } a_{i101} &= c \cos \varphi_i, \quad a_{i111} = c, \quad a_{i121} = a_{i131} = 0. \end{aligned}$$

(Damit ist gleichzeitig (e) bewiesen.) Mit diesen in $F_{il}^{\varphi r}$ bestimmten Koeffizienten erhält man für

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ilk} \left(\frac{x}{r} - \cos \varphi_i \right) r^l \quad \text{mit } r = r(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & u_{11} + cx + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3y^2 + b_4xy^2 + b_5xr \\ & + b_6x^2r + b_7y^2r + b_8(x^3/r). \end{aligned}$$

Man erhält hieraus sofort

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(x, y) = u_{11}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\partial \bar{u} / \partial x)(x, y) = c, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\partial \bar{u} / \partial y)(x, y) = 0.$$

Damit sind (a), (b) und das Theorem bewiesen.

Bemerkung 1. Durch die Wahl von $f(\varphi) = \cos \varphi$ konnte erreicht werden, daß $\bar{u}(x, y) = u(\varphi(x, y), r(x, y))$ im Nullpunkt einmal stetig differenzierbar wird. Der Nachteil dieses Ansatzes ist, daß

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{für } -r_m \leq x \leq r_m \text{ gilt, denn es ist}$$

$$N_{\cos}^{\varphi} = \{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}\} = \{0, \pi, 2\pi\},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u_{ikj}}{\partial \varphi}(\varphi_{i_k}, x) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial u_{ikj}}{\partial r}(\varphi_{i_k}, x) \frac{\partial r}{\partial y}(x, 0) = 0,$$

(mit $k = 1$ für $0 \leq x \leq r_m$ und $k = 2$ für $-r_m \leq x \leq 0$) wegen $(\partial r / \partial y)(x, 0) = 0$ und

$$\frac{\partial u_{ikj}}{\partial \varphi}(\varphi_{i_k}, x) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2 \text{ nach Theorem 1.}$$

5. MODIFIZIERTE SPLINES ÜBER EINEM POLARGITTER

Sei durch $K_p(a)$ die folgende Menge definiert

$$K_p(a) = \{(\varphi, r) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq a\}.$$

Ferner sei durch $s(\varphi, r)$ eine bikubische Splinefunktion über $K_p(r_m)$ bezeichnet mit

$$s(\varphi, r) = s_{ij}(\varphi, r) = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^3 a_{ijkl}(\varphi - \varphi_i)^k(r - r_j)^l \quad \text{für } (\varphi, r) \in F_{ij}^{\varphi r}.$$

THEOREM 3. Gegeben sei ein Polargitter G_{nm} , $w(\varphi, r)$ durch (3) in $F_{ij}^{\varphi r}$ für $i = 1(1)n - 1, j = 1(1)m - 1$,

nm Werte w_{ij} in den Gitterpunkten von G_{nm} , wobei

$$w_{i1} = w_{11} \text{ für } i = 2(1)n \text{ und } w_{nj} = w_{1j} \text{ für } j = 2(1)m,$$

$$n \text{ Werte } q_{im} = \frac{\partial w}{\partial r}(\varphi_i, r_m) \text{ für } i = 1(1)n \text{ mit } q_{1m} = q_{nm},$$

zwei reelle Zahlen c und d ,

$$h(r) = \frac{6}{r_2^5} r^5 - \frac{15}{r_2^4} r^4 + \frac{10}{r_2^3} r^3, \quad \text{falls } r_1 \leq r \leq r_2$$

$$= 1, \quad \text{falls } r \geq r_2.$$

Dann existiert ein $w(\varphi, r)$ mit

- (a) $w \in C^2(K_p(r_m))$,
- (b) $w(\varphi_i, r_j) = w_{ij}$ für $i = 1(1)n, j = 1(1)m$,
- (c) $(\partial w / \partial r)(\varphi_i, r_m) = q_{im}$ für $i = 1(1)n$,
- (d) $\bar{w}(x, y) = w(\varphi(x, y), r(x, y))$ ist aus $C^2(K_c(r_m))$ mit

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(0, 0) = c, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}(0, 0) = d,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

Beweis. In [3] wurde gezeigt, daß $s \in C^2(K_p(r_m))$ ist. Da $h(r) = 1$ für $r \geq r_2$ und $w(\varphi, 0) = w_{11}$ folgt aus [3] sofort (b) und (c). Um (a) zu beweisen, ist noch die Stetigkeit von w entlang

$$\{(\varphi, r_2) \mid \varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}\}$$

bzw.

$$\{(\varphi_i, r) \mid 2 \leq i \leq n - 1 \wedge r_1 \leq r \leq r_2\}$$

zu prüfen. Für den letzten Fall sind die Stetigkeiten von

$$w, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \text{ und } \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial r}$$

gesichert, da

$$(1 - h(r))(w_{11} + rU(\varphi))$$

intervallunabhängig ist. Für den ersten Fall gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow r_2(-) \\ \varphi \rightarrow \bar{\varphi}}} w(\varphi, r) &= \lim_{\substack{r \rightarrow r_2(-) \\ \varphi \rightarrow \bar{\varphi}}} ((1 - h(r))(w_{11} + rU(\varphi)) + h(r) s_{i1}(\varphi, r)) \\ &= s_{i1}(\bar{\varphi}, r_2) = \lim_{\substack{r \rightarrow r_2(+), \\ \varphi \rightarrow \bar{\varphi}}} w(\varphi, r), \\ \lim_{\substack{r \rightarrow r_2(-) \\ \varphi \rightarrow \bar{\varphi}}} \frac{\partial w}{\partial r}(\varphi, r) &= \lim_{\substack{r \rightarrow r_2(-) \\ \varphi \rightarrow \bar{\varphi}}} \left(-\frac{dh}{dr}(r)(w_{11} + rU(\varphi)) + (1 - h(r))U(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{dh}{dr}(r)s_{i1}(\varphi, r) + h(r)\frac{\partial s_{i1}}{\partial r}(\varphi, r) \right) \\ &= \frac{\partial s_{i1}}{\partial r}(\bar{\varphi}, r_2) = \lim_{\substack{r \rightarrow r_2(+), \\ \varphi \rightarrow \bar{\varphi}}} \frac{\partial w}{\partial r}(\varphi, r), \end{aligned}$$

wobei $\varphi_i \leq \bar{\varphi} \leq \varphi_{i+1}$ ist. Analog beweist man die Stetigkeiten von

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \text{ und } \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial r}.$$

Damit ist auch (a) bewiesen. Um nun noch (d) zu zeigen, muß $\bar{w}(x, y) = w(\varphi(x, y), r(x, y))$ entlang der Geraden

$$\{(x, 0) \mid 0 < x \leq r_m\}$$

und insbesondere im Nullpunkt betrachtet werden. Durch die Verwendung der eindimensionalen 2π -periodischen Splineinterpolation in φ -Richtung zur Gewinnung der partiellen Ableitungen

$$p_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varphi}(\varphi_i, r_j) \quad \text{bzw.} \quad r_{ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial r}(\varphi_i, r_j)$$

durch die jeweiligen n Punkte (φ_i, r_j) ($i = 1(1)n, w_{nj} = w_{1j}$), d.h. durch Lösung der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} & \Delta\varphi_{i+1}p_{ij} + 2(\Delta\varphi_i + \Delta\varphi_{i+1})p_{i+1j} + \Delta\varphi_i p_{i+2j} \\ &= 3 \left(\frac{\Delta\varphi_{i+1}}{\Delta\varphi_i} \Delta w_{ij} + \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta\varphi_{i+1}} \Delta w_{i+1j} \right), \quad i = 0(1)n-2 \\ & \text{mit } \Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_{n-1}, \\ & \Delta w_{ij} = w_{i+1j} - w_{ij}, p_{nj} = p_{1j}, p_{0j} = p_{n-1j}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \Delta\varphi_{i+1}r_{ij} + 2(\Delta\varphi_i + \Delta\varphi_{i+1})r_{i+1j} + \Delta\varphi_i r_{i+2j} \\ &= 3 \left(\frac{\Delta\varphi_{i+1}}{\Delta\varphi_i} \Delta q_{ij} + \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta\varphi_{i+1}} \Delta q_{i+1j} \right), \quad i = 0(1)n-2 \\ & \text{mit } q_{ij} = \frac{\partial w}{\partial r}(\varphi_i, r_j), \Delta q_{ij} = q_{i+1j} - q_{ij}, \\ & r_{nj} = r_{1j}, r_{0j} = r_{n-1j}, \end{aligned}$$

für $j = 1(1)m$ ist gewährleistet, daß

$$\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 2\pi(-) \\ r \rightarrow \bar{r}}} \frac{\partial^{k+l} w}{\partial \varphi^k \partial r^l}(\varphi, r) = \lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0(+)} \\ r \rightarrow \bar{r}} \frac{\partial^{k+l} w}{\partial \varphi^k \partial r^l}(\varphi, r), \quad k+l \leq 2, \quad r_1 \leq \bar{r} \leq r_m$$

gilt. Hieraus folgt aber sofort die Stetigkeit von

$$\frac{\partial^{k+l} \bar{w}}{\partial x^k \partial y^l}(x, y) \quad \text{entlang } \{(x, 0) \mid 0 < x \leq r_m\} \text{ für } k+l \leq 2.$$

Bleibt noch die Stetigkeit von $\bar{w}(x, y)$ im Nullpunkt zu zeigen. Es gilt

$$\bar{w}(x, y) = w(\varphi(x, y), r(x, y)) = (1 - h(r))(w_{11} + cx + dy) + h(r) s_{ij}(\varphi, r)$$

und hieraus folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{w}(x, y) = w_{11}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(x, y) &= -\frac{dh}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} (w_{11} + cx + dy) + (1 - h(r))c + \frac{dh}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} s_{ij}(\varphi, r) \\ &+ h(r) \left(\frac{\partial s_{ij}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Da aber

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(h \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\left(\frac{30}{r_2^5} r^4 - \frac{60}{r_2^4} r^3 + \frac{30}{r_2^3} r^2 \right) \frac{r}{r} \right) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\left(\frac{6}{r_2^5} r^5 - \frac{15}{r_2^4} r^4 + \frac{10}{r_2^3} r^3 \right) \left(-\text{sign}(x) \frac{r}{r^2} \right) \right) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(h \frac{\partial r}{\partial x} \right) = 0 \text{ gilt, ist}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(x, y) = c.$$

Analog beweist man $(\partial \bar{w} / \partial y)(0, 0) = d$ bzw.

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

Damit ist (d) und das Theorem 3 bewiesen.

Bemerkung 2. Das oben eingeführte $h(r)$ hat die Aufgabe, die Ebene $(w_{11} + cx + dy)$ im Nullpunkt einzublenden, um die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $\bar{w}(x, y) = w(\varphi(x, y), r(x, y))$ im Nullpunkt zu erreichen. Das $h(r)$ mit den in (3) gestellten Forderungen ist nicht eindeutig bestimmt. Um keine unerwünschten Schwingungen zwischen r_1 und r_2 für $w(\varphi, r)$ zu erhalten, ist es ratsam $h(r)$ als eine in $[r_1, r_2]$ streng monoton steigende Funktion, wie etwa im Theorem 3, zu wählen.

Bemerkung 3. Im Beweis des Theorem 3 wurde die Wahl der vorzugebenden Ableitungen $(\partial s_{i1} / \partial r)(\varphi_i, 0)$ offengelassen, da sie keinen Bedingungen in Bezug auf die Behauptung unterliegen. Um eine möglichst gute Interpolation in der Nähe des Nullpunktes zu erhalten, wird empfohlen

$$q_{i1} = c \cos \varphi_i + d \sin \varphi_i \text{ zu setzen.}$$

Bemerkung 4. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der vorzugebenden Anstiege

$$c = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(0, 0) \quad \text{und} \quad d = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}(0, 0)$$

wäre die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Lösung von

$$\sum_{i=1}^{n-1} (w_{i2} - r_2(c \cos \varphi_i + d \sin \varphi_i) - e)^2 \rightarrow \min.$$

Die Algorithmen zur Berechnung von $u(\varphi, r)$ und $w(\varphi, r)$ wurden mit Hilfe eines Algolprogramms erfolgreich auf ihre Funktionalität getestet.

LITERATUR

1. G. BIRKHOFF AND H. L. GARABEDIAN, Smooth surface interpolation, *J. Math. Phys.* **39** (1960), 258–264.
2. C. CHI, Curvilinear bicubic spline fit interpolation scheme, *Opt. Acta* **20**, No. 12 (1973), 979–993.
3. C. DE BOOR, Bicubic spline interpolation, *J. Math. Phys.* **41** (1962), 212–218.